Indexshifts - Analysis II (SoSe 2020)

Definition 0.1 *Seien $k, n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ und $a_n, .., a_m \in \mathbb{C}$. Betrachten wir die Reihe*

$$\sum_{j=n}^{m} a_j \in \mathbb{C}.$$

Wenn wir nun den Index um k nach unten verschieben wollen, um beispielsweise Summen von Monomen zusammenzufassen (siehe Beispiel 0.2), so substituieren wir sozusagen $i = j - k$. Damit erhalten wir also Anfang für unseren neuen Summationsindex i gerade $n - k$ und entsprechend für unseren Endindex $m - k$. Unsere Reihe hat dann folgende Gestalt

$$\sum_{j=n}^{m} a_j = \sum_{i+k=n}^{m} a_{i+k} = \sum_{i=n-k}^{m-k} a_{i+k}.$$

Beispiel 0.2 *Betrachte die zwei Polynome in $x \in \mathbb{R}$*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j+1} x^j$$

und

$$g(x) = \sum_{i=4}^{n+3} \frac{i-3}{i-2} x^{i-3}$$

für ein natürliches n. Wir wollen die Summe dieser zwei Polynome vereinfachen, also $f(x) + g(x)$. Dazu nutzen wir unseren Indexshift, damit wir jeweils die gleichen Potenzen von x zusammenfassen und vereinfachen können. Also

$$f(x) + g(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j+1} x^j + \sum_{i=4}^{n+4} \frac{i-3}{i-2} x^{i-3}$$

Wir wollen die zweite Reihe um drei nach unten shiften, damit die Summanden in beiden Reihen von der Form $a_j x^j$ sind, also "substituieren" wir dort $j = i - 3$ bzw $i = j + 3$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j+1} x^j + \sum_{j+3=4}^{n+3} \frac{(j+3)-3}{(j+3)-2} x^{(j+3)-3} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j+1} x^j + \sum_{j+3=4}^{n+3} \frac{j}{j+1} x^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j+1} x^j + \sum_{j=4-3}^{n+3-3} \frac{j}{j+1} x^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j+1} x^j + \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{j+1} x^j
\end{aligned}$$

Jetzt haben wir die Indizes angepasst, sodass die Potenzen der x in den Summanden übereinstimmen. Wir müssen vorm Zusammenfassen noch den überschüssigen nullten Summand der ersten Reihe austrennen

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\frac{1}{0+1} x^0}_{=1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1} x^j + \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{j+1} x^j \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j+1} x^j + \frac{j}{j+1} x^j \right) \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j+1} + \frac{j}{j+1} \right) x^j \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1+j}{j+1} x^j \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n} x^j
\end{aligned}$$

Uns fällt auf, dass der Summand für $j = 0$ gerade $x^0 = 1$ wäre, sodass wir den der Summe vorstehenden Summanden mit Index 0 *der Summe hinzufügen können*

$$= \sum_{j=0}^{n} x^j$$